Elementy logiki

Klasyczny rachunek zdań

Wojciech Buszkowski

Zakład Teorii Obliczeń
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

1. Klasyczny Rachunek Zdań

1.1. Spójniki logiczne

Zdaniem w sensie logicznym nazywamy wyrażenie, które jest *prawdziwe* lub *fałszywe*.

Prawdę i fałsz nazywamy wartościami logicznymi.

Prawdę oznaczamy symbolem 1, a fałsz symbolem 0.

Zmienne zdaniowe p, q, r, s (także z indeksami) reprezentują dowolne zdania.

Spójniki logiczne (albo: funktory KRZ) służą do konstrukcji zdań logicznie złożonych. Wyróżniamy pięć podstawowych spójników logicznych.

Spójnik negacji jest to wyrażenie *nieprawda, że* użyte w kontekście *nieprawda, że* p. Symbol: $\neg$, w kontekście: $\neg p$. Zdanie postaci $\neg p$ nazywamy negacją zdania p.

Spójnik koniunkcji jest to wyraz *i* użyty w kontekście p *i* q. Symbol: $\wedge$, w kontekście: $p \wedge q$. Zdanie postaci $p \wedge q$ nazywamy koniunkcją zdań p i q.

Spójnik alternatywy jest to wyraz *lub* użyty w kontekście p *lub* q. Symbol: $\vee$, w kontekście: $p \vee q$. Zdanie postaci $p \vee q$ nazywamy alternatywą zdań p i q.

Spójnik implikacji jest to wyrażenie *jeżeli ..., to* użyte w kontekście *jeżeli* p*, to* q. Symbol $\Rightarrow$, w kontekście: $p \Rightarrow q$. Zdanie postaci $p \Rightarrow q$ nazywamy implikacją o poprzedniku p i następniku q.

Spójnik równoważności jest to wyrażenie *wtedy i tylko wtedy, gdy* użyte w kontekście p *wtedy i tylko wtedy, gdy* q. Symbol: $\Leftrightarrow$, w kontekście: $p \Leftrightarrow q$. Zdanie postaci $p \Leftrightarrow q$ nazywamy równoważnością zdań p i q.

Inne oznaczenia spójników logicznych: spójnik negacji $\sim$, koniunkcji $\&, \cdot$, alternatywy $+$, implikacji $\rightarrow$, równoważności $\leftrightarrow, \equiv$.

Zdanie p nazywamy argumentem spójnika negacji w zdaniu $\neg p$. Spójnik negacji jest jednoargumentowy.

Zdania p i q nazywamy argumentami spójnika koniunkcji w zdaniu $p \wedge q$. Spójnik koniunkcji jest dwuargumentowy. Spójniki alternatywy, implikacji i równoważności są też dwuargumentowe.

Spójniki logiczne są ekstensjonalne: wartość logiczna zdania złożonego za pomocą danego spójnika jest jednoznacznie wyznaczona przez ten spójnik i wartości logiczne argumentów.

Negacja zdania prawdziwego jest zdaniem fałszywym. Negacja zdania fałszywego jest zdaniem prawdziwym.

Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba argumenty są prawdziwe.

Alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden argument jest prawdziwy.

Implikacja dwóch zdań (zdanie warunkowe) jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik jest fałszywy.

Równoważność dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba argumenty mają tę samą wartość logiczną.

$\neg 1 = 0$, $\neg 0 = 1$

$1 \wedge 1 = 1$ $1 \vee 1 = 1$ $1 \Rightarrow 1 = 1$ $1 \Leftrightarrow 1 = 1$

$1 \wedge 0 = 0$ $1 \vee 0 = 1$ $1 \Rightarrow 0 = 0$ $1 \Leftrightarrow 0 = 0$

$0 \wedge 1 = 0$ $0 \vee 1 = 1$ $0 \Rightarrow 1 = 1$ $0 \Leftrightarrow 1 = 0$

$0 \wedge 0 = 0$ $0 \vee 0 = 0$ $0 \Rightarrow 0 = 1$ $0 \Leftrightarrow 0 = 1$

W powyższych wzorach symbole spójników oznaczają działania na zbiorze $\{0, 1\}$, odpowiadające poszczególnym spójnikom. Czasem działanie odpowiadające $\wedge$ oznaczamy $\wedge'$ i podobnie dla pozostałych spójników.

Tablice prawdziwościowe spójników

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

1.2. Formuły KRZ

Formuły KRZ to wyrażenia poprawnie zbudowane ze zmiennych zdaniowych za pomocą spójników logicznych. W formułach zawierających kilka spójników stosujemy nawiasy, żeby jednoznacznie określić argumenty każdego spójnika.

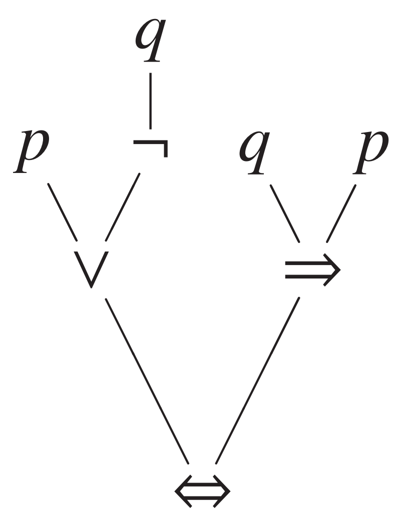
Przykład. Wyrażenie $p \wedge q \vee r$ nie jest poprawnie zbudowaną formułą. Wprowadzając nawiasy, otrzymujemy dwie istotnie różne formuły: $(p \wedge q) \vee r$ oraz $p \wedge (q \vee r)$.

Niektóre nawiasy możemy pominąć, przyjmując priorytety (siłę wiązania) spójników. Najsilniejszy jest spójnik negacji, słabsze są spójniki koniunkcji i alternatywy (równosilne), a najsłabsze spójniki implikacji i równoważności (równosilne).

$p \wedge q \Rightarrow \neg p \vee q$ przedstawia formułę $(p \wedge q) \Rightarrow ((\neg p) \vee q)$.

Drzewo formuły:

$p \vee \neg q \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$, czyli $(p \vee (\neg q)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$



Notacja beznawiasowa (polska, Łukasiewicza): $\Leftrightarrow \vee p \neg q \Rightarrow qp$. Piszemy funktor przed argumentami. (Czytamy drzewo gałęziami od lewej, ang. *depth-first*.)

Inny zapis: $EApNqCqp$.

Oznaczamy: $\neg : N$, $\wedge : K$, $\vee : A$, $\Rightarrow: C$, $\Leftrightarrow: E$.

Definicja 1. Niech V będzie pewnym zbiorem zmiennych zdaniowych. *Wartościowaniem* zbioru V nazywamy dowolną funkcję $w : V \mapsto \{0, 1\}$.

Mniej formalnie: wartościowanie jest to przyporządkowanie wartości logicznych pewnym zmiennym zdaniowym.

Każde wartościowanie w zbioru V jednoznacznie określa wartość logiczną dowolnej formuły KRZ, której zmienne należą do V.

Literami $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ oznaczamy dowolne formuły KRZ. Wartość logiczną formuły φ dla wartościowania w oznaczamy przez $w(\varphi)$. Tę wartość można wyznaczyć w oparciu o następujące warunki rekurencyjne:

$w(\neg\varphi) = \neg' w(\varphi)$,

$w(\varphi \wedge \psi) = w(\varphi) \wedge' w(\psi)$, $w(\varphi \vee \psi) = w(\varphi) \vee' w(\psi)$,
$w(\varphi \Rightarrow \psi) = w(\varphi) \Rightarrow' w(\psi)$, $w(\varphi \Leftrightarrow \psi) = w(\varphi) \Leftrightarrow' w(\psi)$

Przykład. $\varphi = p \vee q \Rightarrow p \wedge q$, $w(p) = 1$, $w(q) = 0$. Obliczamy:

$w(\varphi) = w(p \vee q) \Rightarrow' w(p \wedge q) = (w(p) \vee' w(q)) \Rightarrow' (w(p) \wedge' w(q) =$

$= (1 \vee' 0) \Rightarrow' (1 \wedge' 0) = 1 \Rightarrow' 0 = 0$

W praktyce zaczynamy od drugiego wiersza i pomijamy "$'$".

W ten sposób możemy wyznaczyć wartość logiczną dowolnego zdania logicznie złożonego, jeżeli znane są wartości logiczne wszystkich składowych zdań logicznie prostych.

Przykład. Zdanie: *jeżeli nieprawda, że Poznań leży nad Wisłą, to jeżeli Poznań leży nad Wartą, to przez Poznań przepływa rzeka.*

p - *Poznań leży nad Wisłą*, q - *Poznań leży nad Wartą*, r - *przez Poznań przepływa rzeka.*

Logiczny schemat zdania: $\varphi = \neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Wartościowanie: $w(p) = 0$, $w(q) = w(r) = 1$. Mamy
$w(\varphi) = \neg 0 \Rightarrow (1 \Rightarrow 1) = 1 \Rightarrow 1 = 1$. Zatem zdanie jest prawdziwe.

Tablica prawdziwościowa formuły: $\varphi = p \vee \neg q \Rightarrow \neg p \wedge r$.

Oznaczmy: $\psi = p \vee \neg q, \chi = \neg p \wedge r$.

p	q	r	$\neg q$	$\neg p$	ψ	χ	φ
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

1.3. Tautologie KRZ, logiczna równoważność i logiczne wynikanie

Definicja 2. *Tautologią KRZ* nazywamy formułę KRZ, która przyjmuje wartość logiczną 1 dla każdego wartosciowania zmiennych występujących w tej formule.

Tautologie KRZ są logicznymi schematami zdań logicznie prawdziwych, tzn. prawdziwych na mocy samej logiki, niezależnie od wartości logicznych składowych zdań prostych.

Przykład. Zdanie *Poznań leży nad Wartą* jest prawdziwe, ale nie jest logicznie prawdziwe. Jego schemat logiczny p nie jest tautologią. Zdanie *jeżeli Poznań leży nad Wartą, to Poznań leży nad Wartą* jest logicznie prawdziwe. Jego schemat logiczny $p \Rightarrow p$ jest tautologią.

$w(p) = 1$. Wtedy $w(p \Rightarrow p) = 1 \Rightarrow 1 = 1$.

$w(p) = 0$. Wtedy $w(p \Rightarrow p) = 0 \Rightarrow 0 = 1$.

Definicja 3. Mówimy, że formuła φ jest *logicznie równoważna* formule ψ (w KRZ), jeżeli dla każdego wartościowania w (zmiennych występujących w tych formułach) $w(\varphi) = w(\psi)$.

Fakt 1. *φ jest logicznie równoważne ψ wtetdy i tylko wtedy, gdy formuła $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią.*

Dowód. Oczywiście dla dowolnego wartościowania w:

$w(\varphi) = w(\psi)$ wtw, gdy $w(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$.

Stąd wynika równoważność warunków:

(L) dla każdego wartościowania w $\;w(\varphi) = w(\psi)$,

(P) dla każdego wartościowania w $\;w(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$,

co kończy dowód faktu. Q.E.D.

Prawa łączności koniunkcji, alternatywy i równoważności:

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$

Prawa przemienności koniunkcji, alternatywy i równoważności:

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

Na mocy praw łączności możemy pomijać nawiasy w formułach $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ oraz $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$.

Na mocy praw łączności i przemienności kolejność występowania zmiennych nie wpływa na wartość logiczną takich formuł.

To samo można stwierdzić o formułach postaci $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ i $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Prawa idempotentności koniunkcji i alternatywy:

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

$p \vee p \Leftrightarrow p$

Prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy i alternatywy względem koniunkcji:

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Pierwsze prawo rozdzielności przypomina arytmetyczne prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$

lecz drugie prawo rozdzielności nie ma odpowiednika w arytmetyce.

Prawa De Morgana:

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Prawo podwójnej negacji: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

Prawo transpozycji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Prawo eksportacji-importacji: $[p \wedge q \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

Prawo wyłączonego środka: $p \vee \neg p$

Prawo sprzeczności: $\neg(p \wedge \neg p)$

Prawa definiowania jednych spójników przez inne:

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Prawa z ustalonym argumentem:

$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$, $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$, $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $p \vee 0 \Leftrightarrow p$

$(1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$, $(0 \Rightarrow p) \Leftrightarrow 1$, $(p \Rightarrow 1) \Leftrightarrow 1$, $(p \Rightarrow 0) \Leftrightarrow \neg p$

Definicja 4. Mówimy, że wartościowanie w *spełnia* formułę φ, jeżeli $w(\varphi) = 1$. Formułę nazywamy *spełnialną*, jeżeli istnieje wartościowanie, które spełnia tę formułę. Zbiór formuł nazywamy *spełnialnym*, jeżeli istnieje wartościowanie, które spełnia wszystkie formuły z tego zbioru (tzn. *spełnia ten zbiór*).

Fakt 2. *Formuła φ jest spełnialna wtw, gdy formuła $\neg\varphi$ nie jest tautologią. Formuła φ jest tautologią wtw, gdy formuła $\neg\varphi$ nie jest spełnialna.*

Definicja 5. Mówimy, że formuła φ *logicznie wynika* ze zbioru formuł S (w KRZ), jeżeli każde wartościowanie spełniające zbiór S spełnia formułę φ.

Fakt 3. *Formuła φ logicznie wynika ze zbioru formuł S wtw, gdy zbiór $S \cup \{\neg\varphi\}$ nie jest spełnialny.*

Fakt 4. *Formuła ψ logicznie wynika ze zbioru $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ wtw, gdy formuła $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ jest tautologią.*

Prawo odrywania: $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Prawo odrzucania: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Prawo sylogizmu hipotetycznego: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Prawa symplifikacji: $p \wedge q \Rightarrow p, \;\; p \wedge q \Rightarrow q$

Prawa addycji: $p \Rightarrow p \vee q, \;\; q \Rightarrow p \vee q$

Logiczne wynikanie zapisujemy też w postaci schematów wnioskowania:

$$\frac{\varphi_1; \ldots; \varphi_n}{\psi},$$

gdzie formuły $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nazywamy przesłankami, a formułę ψ wnioskiem. Schemat wnioskowania nazywamy logiczną regułą wnioskowania KRZ, jeżeli wniosek logicznie wynika z przesłanek (tzn. ze zbioru przesłanek).

Reguła odrywania (nazwa łacińska: *modus ponens*)

$$(\mathrm{MP})\ \frac{p \Rightarrow q;\ p}{q}$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Reguła sylogizmu hipotetycznego:

$$(\mathrm{SYL})\ \frac{p \Rightarrow q;\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

Reguła odrzucania:

$$\frac{p \Rightarrow q;\ \neg q}{\neg p}$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Reguła wprowadzania równoważności:

$$\frac{p \Rightarrow q;\ q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \\ \hline p \Leftrightarrow q \end{array}$$

1.4. Podstawianie w KRZ

Tautologie i logiczne reguły wnioskowania KRZ są zamknięte ze względu na podstawianie dowolnych formuł za zmienne zdaniowe.

$\sigma = [p_1/\varphi_1, \ldots, p_n/\varphi_n]$ oznacza operację równoczesnego podstawiania formuły φ_i za zmienną p_i dla $i = 1, \ldots, n$. Taką operację nazywamy podstawieniem.

$\varphi\sigma$ oznacza wynik podstawienia σ w formule φ.

Przykład. $(p \Rightarrow p \vee q)[p/q, q/q \vee r] = q \Rightarrow q \vee (q \vee r)$.

UWAGA: Wykonując podstawienie $\varphi\sigma$, formułę φ_i podstawiamy za każde wystąpienie zmiennej p_i w formule φ, lecz nie za te wystąpienia, które pojawiają się w wyniku podstawiania (występują w formułach φ_j). Dlatego $\varphi[p/\psi, q/\chi]$ jest na ogół różne od $\varphi[p/\psi][q/\chi]$.

$(p \Rightarrow p \vee q)[p/q][q/q \vee r] = (q \Rightarrow q \vee q)[q/q \vee r] = q \vee r \Rightarrow q \vee r \vee q \vee r$

Fakt 5. *Jeżeli φ jest tautologią KRZ, to dla każdego podstawienia σ formuła $\varphi\sigma$ jest tautologią KRZ.*

Dowód. Niech $\sigma = [p_1/\varphi_1, \ldots, p_n/\varphi_n]$. Niech φ będzie tautologią.

Niech w będzie dowolnym wartościowaniem zmiennych w $\varphi\sigma$. Określamy wartościowanie w' zmiennych w φ:

$w'(p_i) = w(\varphi_i)$ dla p_i występujących w φ, $w'(q) = w(q)$ dla pozostałych zmiennych w φ.

Oczywiście $w(\varphi\sigma) = w'(\varphi)$. Ponieważ φ jest tautologią, więc $w'(\varphi) = 1$, czyli $w(\varphi\sigma) = 1$. Zatem $\varphi\sigma$ przyjmuje wartość 1 dla każdego wartościowania w. Q.E.D.

Przykład. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ jest tautologią. Zatem tautologią jest każda formuła postaci $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, ponieważ powstaje z poprzedniej przez podstawienie $[p/\varphi, q/\psi]$.

Fakt 6. *Jeżeli* ψ *logicznie wynika ze zbioru* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, *to dla każdego podstawienia* σ *formuła* $\psi\sigma$ *logicznie wynika ze zbioru* $\{\varphi_1\sigma, \ldots, \varphi_n\sigma\}$.

Dowód. Zakładamy, że ψ logicznie wynika z $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Niech σ będzie podstawieniem.

Na mocy faktu 4, formuła $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ jest tautologią.

Mamy: $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi)\sigma = \varphi_1\sigma \wedge \cdots \wedge \varphi_n\sigma \Rightarrow \psi\sigma$.

Na mocy faktu 5, $\varphi_1\sigma \wedge \cdots \wedge \varphi_n\sigma \Rightarrow \psi\sigma$ jest tautologią.

Na mocy faktu 4, $\psi\sigma$ logicznie wynika ze zbioru $\{\varphi_1\sigma, \ldots, \varphi_n\sigma\}$.
Q.E.D.

Przykład. Skoro MP jest logiczną regułą wnioskowania, to jest nią też każdy schemat:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi;\ \varphi}{\psi}$$

1.5. Postacie normalne formuł KRZ

Formuły p i $\neg p$, gdzie p jest dowolną zmienną zdaniową, nazywamy literałami; p jest literałem pozytywnym, a $\neg p$ negatywnym. Literały p, $\neg p$ są przeciwne (jeden względem drugiego).

Alternatywa elementarna (albo: klauzula) jest to alternatywa skończenie wielu literałów, np. $p \vee \neg q \vee r$, $\neg q$.

Koniunkcja elementarna jest to koniunkcja skończenie wielu literałów, np. $p \wedge \neg q \wedge r$, $\neg q$.

Formuła w koniunkcyjnej postaci normalnej (kpn) jest to koniunkcja skończenie wielu klauzul, np. $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$.

Formuła w alternatywnej postaci normalnej (apn) jest to alternatywa skończenie wielu koniunkcji elementarnych, np. $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$.

Twierdzenie 1. *Każda formuła KRZ jest logicznie równoważna pewnej formule w kpn i pewnej formule w apn.*

Przykład. $\varphi = p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge \neg r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	φ	apn	kpn
1	1	1	1	0	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
1	1	0	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge \neg r$	
1	0	1	0	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	
1	0	0	0	1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
0	1	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	
0	1	0	0	1	1	0		$p \vee \neg q \vee r$
0	0	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	0	0	0	1	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	

apn: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

kpn: $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Przypadki szczególne:

(1) $w(\varphi) = 0$ dla każdego wartościowania w. Wtedy φ jest logicznie równoważne formule $p \wedge \neg p$, która jest w apn.

(2) $w(\varphi) = 1$ dla każdego wartościowania w. Wtedy φ jest logicznie równoważne formule $p \vee \neg p$, która jest w kpn.

Sprowadzanie do apn i kpn metodą przekształceń równoważnościowych.

Podformuły danej formuły zastępujemy równoważnymi formułami, stosując następujące prawa (zastępujemy lewą stronę prawą stroną).

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$

$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$, $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi)$, $(\psi \vee \chi) \wedge \varphi \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi)$

$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, $(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$

Przykład. Sprowadzamy formułę $\varphi = p \vee q \Leftrightarrow q \wedge \neg r$ do kpn.

$[p \vee q \Rightarrow q \wedge \neg r] \wedge [q \wedge \neg r \Rightarrow p \vee q]$

$[\neg(p \vee q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge [\neg(q \wedge \neg r) \vee (p \vee q)]$

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge [\neg q \vee r \vee p \vee q]$ (negacyjna postać normalna)

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee q] \wedge [(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r] \wedge [\neg q \vee r \vee p \vee q]$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r \vee p \vee q)$

Sprowadzamy φ do apn. Powtarzamy trzy pierwsze kroki i kontynuujemy.

$\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge \neg q\} \vee \{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge r\} \vee$
$\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge p\} \vee \{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge q\}$

$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r \wedge r) \vee$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge p) \vee (q \wedge \neg r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge q) \vee (q \wedge \neg r \wedge q)$

Twierdzenie 2. *Formuła w kpn jest tautologią KRZ wtw, gdy w każdej składowej klauzuli występuje para przeciwnych literałów.*

Dowód. Twierdzenie wynika z dwóch faktów.

(1) Formuła $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ jest tautologią wtw, gdy każda formuła φ_i jest tautologią.

(2) Klauzula jest tautologią wtw, gdy występuje w niej para przeciwnych literałów.

(1) jest oczywiste.

(2). Jeżeli w klauzuli występują przeciwne literały, to dla każdego wartościowania jeden z nich ma wartość 1, czyli cała klauzula ma wartość 1. Jeżeli w klauzuli nie występują przeciwne literały, to można znaleźć wartościowanie, dla którego wszystkie literały mają wartość 0, czyli cała klauzula ma wartość 0. Q.E.D.

Przykład. $\chi = p \vee \neg q \vee r$. Określamy $w(p) = 0$, $w(q) = 1$, $w(r) = 0$. Wtedy $w(\chi) = 0$.

Twierdzenie 3. *Formuła w apn nie jest spełnialna wtw, gdy w każdej składowej koniunkcji elementarnej występuje para przeciwnych literałów.*

Przykład. $\varphi = p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$. Sprowadzamy φ do kpn.

$\neg[p \wedge (q \vee r)] \vee [(p \wedge q) \vee r]$

$[\neg p \vee \neg(q \vee r)] \vee [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

$[\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)] \vee [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

$[(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)] \vee [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

$(\neg p \vee \neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q \vee r)$

Formuła φ jest tautologią. Sprowadzamy φ do apn.

$\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q) \vee r$

Formuła φ jest spełnialna.

1.6. Formalne systemy dedukcyjne KRZ

Przedstawimy system dedukcyjny KRZ w stylu Fregego-Hilberta.

Niektóre tautologie KRZ przyjmujemy jako aksjomaty. Wszystkie pozostałe tautologie i wszystkie logiczne reguły wnioskowania KRZ można wyprowadzić z tych aksjomatów, posługując się dwiema regułami dowodzenia: *regułą odrywania* i *regułą podstawiania*.

$$\text{(MP)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi;\ \varphi}{\psi},\quad \text{(SUB)}\ \frac{\varphi}{\varphi\sigma}$$

Te reguły przyjmujemy dla wszelkich formuł φ, ψ i każdego podstawienia σ. Jeżeli przesłanki tych reguł są tautologiami, to wniosek jest tautologią.

Aksjomaty implikacji

(A1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (prawo poprzednika)

(A2) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (prawo Fregego)

Aksjomat negacji

(A3) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (odwrotne prawo transpozycji)

Aksjomaty koniunkcji

(A4) $p \wedge q \Rightarrow p$, (A5) $p \wedge q \Rightarrow q$ (prawa symplifikacji)

(A6) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)]$ (prawo mnożenia następników)

Aksjomaty alternatywy

(A7) $p \Rightarrow p \vee q$, (A8) $q \Rightarrow p \vee q$ (prawa addycji)

(A9) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)]$ (prawo dodawania poprzedników)

Aksjomaty równoważności

(A10) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, (A11) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(A12) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)]$

Dowód formalny można przedstawić jako skończony ciąg formuł, w którym każda formuła jest aksjomatem systemu lub wnioskiem z poprzednich formuł na mocy reguł dowodzenia systemu. Ostatnia formuła tego ciągu jest dowodzonym twierdzeniem. Twierdzenia systemów formalnych nazywamy też tezami.

(T1) $p \Rightarrow p$ (prawo tożsamości)

1. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (A2)
2. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)]$ SUB 1 $[r/p]$
3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (A1)
4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ MP 2,3
5. $(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ SUB 4 $[q/p \Rightarrow p]$
6. $p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ SUB 3 $[q/p]$
7. $p \Rightarrow p$ MP 5,6

(T2) $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)]$ (A6)

2. $(p \wedge q \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow q \wedge p)]$ SUB 1 $[p/p \wedge q, r/p]$

3. $p \wedge q \Rightarrow q$ (A5)

4. $(p \wedge q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow q \wedge p)$ MP 2,3

5. $p \wedge q \Rightarrow p$ (A4)

6. $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$ MP 4,5

(T2') $q \wedge p \Rightarrow p \wedge q$

1. $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$ (T2)

2. $q \wedge p \Rightarrow p \wedge q$ SUB 1 $[p/q, q/p]$

(T2") $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$. W (A12) podstaw $p/p \wedge q$, $q/q \wedge p$. Potem zastosuj (T2), (T2') i dwa razy MP.

W formalnych dowodach reguł przesłanki reguły grają rolę założeń dowodu.

Istotnie ograniczamy stosowanie SUB: *nie wolno podstawiać w założeniach, ani żadnych formułach, które od nich pochodzą. Zatem SUB wolno stosować tylko do aksjomatów oraz już udowodnionych tez i reguł systemu.*

$$\text{(SYL)}\ \frac{\varphi \Rightarrow \psi;\ \psi \Rightarrow \chi}{\varphi \Rightarrow \chi}$$

1. $\varphi \Rightarrow \psi$ (założenie)
2. $\psi \Rightarrow \chi$ (założenie)
3. $[\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)] \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)]$ (A2), SUB
4. $(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow [\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)]$ (A1), SUB
5. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ MP 4,2
6. $\varphi \Rightarrow \chi$ $2\times$ MP 3,5,1

Jeżeli przesłanki reguły (SYL) można udowodnić, to i wniosek można udowodnić: wystarczy skopiować powyższy dowód.

Tak jest dla wszelkich reguł udowodnionych w systemie. Wobec tego, udowodnione reguły możemy stosować w następnych dowodach jako skróty; ich stosowanie nie zmienia siły systemu.

$$\text{(KOM)}\ \frac{\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)}{\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)}\ \text{(reguła komutacji)}$$

1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ (założenie)
2. $[\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)] \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)]$ (A2), SUB
3. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$ MP 2,1
4. $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ (A1), SUB
5. $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$ SYL 4,3

(T3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (prawo sylogizmu hipotetycznego)

1. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (A2)
2. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ (A1), SUB
3. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ SYL 2,1
4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ KOM 3

(T4) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (prawo Dunsa Szkota)

1. $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (A3)
2. $\neg p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (A1), SUB
3. $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ SYL 2,1

Tezy tego systemu pokrywają się z tautologiami KRZ. Reguły dowodliwe w tym systemie pokrywają się z logicznymi regułami wnioskowania KRZ.

Przedstawimy system sekwencyjny dowodzenia praw KRZ. W takich systemach procedura poszukiwania dowodu może być całkowicie zautomatyzowana.

Sekwent: skończona lista formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, interpretowana jako alternatywa $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Aksjomaty: wszystkie sekwenty zawierające parę sprzecznych formuł $\varphi, \neg\varphi$ (na dowolnych miejscach).

Reguły dowodzenia:

$$(\mathrm{R}\,\neg)\ \frac{X, \varphi, Y}{X, \neg\neg\varphi, Y}$$

$$(\mathrm{R}\wedge)\ \frac{X, \varphi, Y;\ \ X, \psi, Y}{X, \varphi \wedge \psi, Y} \quad (\mathrm{R}\,\neg\wedge)\ \frac{X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \wedge \psi), Y}$$

$$(\mathrm{R}\vee)\ \frac{X,\varphi,\psi,Y}{X,\varphi\vee\psi,Y}\quad(\mathrm{R}\neg\vee)\ \frac{X,\neg\varphi,Y;\ \ X,\neg\psi,Y}{X,\neg(\varphi\vee\psi),Y}$$

$$(\mathrm{R}\Rightarrow)\ \frac{X,\neg\varphi,\psi,Y}{X,\varphi\Rightarrow\psi,Y}\quad(\mathrm{R}\neg\Rightarrow)\ \frac{X,\varphi,Y;\ \ X,\neg\psi,Y}{X,\neg(\varphi\Rightarrow\psi),Y}$$

$$(\mathrm{R}\Leftrightarrow)\ \frac{X,\neg\varphi,\psi,Y;\ \ X,\varphi,\neg\psi,Y}{X,\varphi\Leftrightarrow\psi,Y}\quad(\mathrm{R}\neg\Leftrightarrow)\ \frac{X,\varphi,\psi,Y;\ \ X,\neg\varphi,\neg\psi,Y}{X\neg(\varphi\Leftrightarrow\psi),Y}$$

W tych regułach litery X, Y oznaczają dowolne *konteksty*, czyli skończone listy formuł (mogą być puste).

W przypadku reguły z jedną przesłanką wniosek jest logicznie równoważny tej przesłance; w przypadku reguły z dwiema przesłankami wniosek jest logicznie równoważny koniunkcji przesłanek (listy interpretujemy jako alternatywy).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q, \neg p}{p, \neg\neg q, \neg p}}{p, \neg q \Rightarrow \neg p} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg q, q, \neg p}{\neg q, \neg\neg q, \neg p}}{\neg q, \neg q \Rightarrow \neg p}}{\neg(p \Rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p}}{(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p, p \qquad \neg p, q}{\neg p, p \wedge q} \qquad \dfrac{\neg q, p \qquad \neg q, q}{\neg q, p \wedge q}}{\neg(p \vee q), p \wedge q}}{p \vee q \Rightarrow p \wedge q}$$

Formuła w korzeniu drzewa jest logicznie równoważna koniunkcji wszystkich alternatyw elementarnych na liściach drzewa. Zatem nasz system może służyć do sprowadzania formuł do kpn.

Z lewej strony: drzewo dowodu prawa $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Z prawej strony: poszukiwanie dowodu formuły $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ zakończyło się porażką, ponieważ dwa sekwenty elementarne na liściach drzewa nie są aksjomatami.

1.7. Funkcje boolowskie

Definicja 6. Niech $n \geq 1$. Funkcję $n-$argumentową, której argumenty i wartości są wartościami logicznymi 0,1, nazywamy $n-$argumentową *funkcją boolowską*.

Inne nazwy: funkcja logiczna, funkcja przełączająca.

Funkcje boolowskie są stosowane w elektronice jako funkcje przetwarzania sygnałów (stanów). 1 to stan czynny (sygnał, prąd płynie), 0 to stan bierny (brak sygnału, prąd nie płynie).

FB_n oznacza zbiór wszystkich $n-$argumentowych funkcji boolowskich.

W tym podrozdziale zmienne x, y, z (z indeksami) reprezentują wartości logiczne.

W_n oznacza zbiór wszystkich wartościowań n zmiennych. $|W|$ oznacza liczbę elementów skończonego zbioru W.

Funkcje jednoargumentowe ($n = 1$).

x	$f_0^1(x)$	$f_1^1(x)$	$f_2^1(x)$	$f_3^1(x)$
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

$f_0^1(x) = 0$ funkcja zero

$f_1^1(x) = \neg x$ funkcja negacji

$f_2^1(x) = x$ funkcja identycznościowa

$f_3^1(x) = 1$ funkcja jeden

Fakt 7. $|\mathrm{FB}_n| = 2^{(2^n)}$.

Dowód. W_n jest zbiorem wszystkich wartościowań zmiennych $x_1, \ldots, x_n$; wartościowania można przedstawić jako ciągi binarne długości n. Stąd $|\mathrm{W}_n| = 2^n$. Funkcje z FB_n można przedstawić jako ciągi binarne długości 2^n, co daje powyższą równość. Q.E.D.

Zatem $|FB_1| = 4$, $|FB_2| = 16$, $|FB_3| = 256$. Wypiszemy funkcje dwuargumentowe ($n = 2$).

x	y	f^2_0	f^2_1	f^2_2	f^2_3	f^2_4	f^2_5	f^2_6	f^2_7
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	f^2_8	f^2_9	f^2_{10}	f^2_{11}	f^2_{12}	f^2_{13}	f^2_{14}	f^2_{15}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_8^2(x, y) = x \wedge y$ funkcja koniunkcji

$f_9^2(x, y) = x \Leftrightarrow y$ funkcja równoważności

$f_{11}^2(x, y) = x \Rightarrow y$ funkcja implikacji

$f_{14}^2(x, y) = x \vee y$ funkcja alternatywy

UWAGA: W elektronice stosuje się notację $x \cdot y$ albo xy zamiast $x \wedge y$, $x + y$ zamiast $x \vee y$ i x' lub $\overline{x}$ zamiast $\neg x$. Wyrażenie $(x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$ zapisujemy $xy'z + x'yz$. Będziemy stosować tylko notację logiczną.

Fakt 8. Każdą funkcję boolowską można przedstawić jako wyrażenie w apn i jako wyrażenie w kpn.

Dowód. Tak jest, ponieważ do funkcji boolowskich możemy zastosować poznaną wcześniej metodę wyznaczania apn i kpn za pomocą tablicy. Q.E.D.

Przedstawiamy w ten sposób cztery pierwsze funkcje dwuargumentowe.

$f_0^2(x, y) = x \wedge \neg x = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$

$f_1^2(x, y) = \neg x \wedge \neg y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$

$f_2^2(x, y) = \neg x \wedge y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee y)$

$f_3^2(x, y) = (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y)$

Wyrażenie w apn dla $f_3^2(x, y)$ można uprościć, stosując prawa algebry logiki:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \;\; x \vee \neg x = 1, \;\; x \wedge 1 = x$$

$$f_3^2(x, y) = \neg x \wedge (y \vee \neg y) = \neg x \wedge 1 = \neg x$$

Dla niewielkiej liczby zmiennych tę metodę upraszczania apn można wykonywać graficznie, posługując się *tablicami Karnaugha*.

Tablica Karnaugha dla dwóch zmiennych.

f	y	$\neg y$
x	$x \wedge y$	$x \wedge \neg y$
$\neg x$	$\neg x \wedge y$	$\neg x \wedge \neg y$

f_3^2	y	$\neg y$
x	0	0
$\neg x$	1	1

Odczyt: $f_3^2(x, y) = \neg x$

Sąsiednie pola tablicy odpowiadają koniunkcjom elementarnym, które różnią się jednym literałem: w jednej z nich ten literał wystepuje pozytywnie, a w drugiej negatywnie. Alternatywa tych koniunkcji redukuje się do koniunkcji pozostałych literałów.

Funkcja: $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (\neg y \wedge z)$

Tablica Karnaugha dla trzech zmiennych; podwójne linie są sklejone, czyli tablica ma kształt pierścienia.

f	y	$\neg y$	$\neg y$	y
x	1	1	0	1
$\neg x$	1	1	0	0
	z	z	$\neg z$	$\neg z$

Odczyt: $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z$

Dalsze informacje o tablicach Karnaugha można znaleźć w podręczniku: J. Jaworski, Z. Palka i J. Szymański, *Matematyka dyskretna dla informatyków. I. Elementy kombinatoryki.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2007.

Definicja 7. Niech f będzie $n-$argumentową funkcją boolowską, a F zbiorem funkcji boolowskich. Mówimy, że funkcja f jest *przedstawialna* przez funkcje ze zbioru F, jeżeli istnieje wyrażenie $E(x_1, \ldots, x_n)$ zbudowane z symboli funkcji ze zbioru F i zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ (niekoniecznie wszystkich) i takie, że równość

$$f(x_1, \ldots, x_n) = E(x_1, \ldots, x_n)$$

jest prawdziwa dla wszystkich wartościowań zmiennych (czyli jest tożsamością w algebrze logiki).

Definicja 8. Zbiór funkcji boolowskich F nazywamy *zupełnym*, jeżeli każda funkcja boolowska jest przedstawialna przez funkcje ze zbioru F.

Zbiór $\{\neg, \wedge, \vee\}$ jest zupełny.

Można ograniczyć się do dwóch funkcji.

Fakt 9. Zbiory $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ i $\{\neg, \Rightarrow\}$ są zupełne.

Zbiór $\{\neg, \wedge\}$ jest zupełny, ponieważ dowolną funkcję boolowską można przedstawić w kpn, a następnie wyeliminować alternatywę, stosując prawa:

$$x_1 \vee \cdots \vee x_k = \neg(\neg x_1 \wedge \cdots \wedge \neg x_k)$$

Zbiór $\{\neg, \vee\}$ jest zupełny, ponieważ każdą funkcję boolowską możemy przedstawić w apn, a następnie wyeliminować koniunkcję, stosując prawa:

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_k = \neg(\neg x_1 \vee \cdots \vee \neg x_k)$$

Przykład. $f(x, y) = x \Leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$ (apn).

Stąd $f(x, y) = \neg(\neg x \vee \neg y) \vee \neg(x \vee y)$.

Także $f(x, y) = (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$ (kpn).

Stąd $f(x, y) = \neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(y \wedge \neg x)$.

Wykażemy zupełność zbioru $\{\neg, \Rightarrow\}$.

Z tożsamości $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$ otrzymujemy $x \vee y = \neg x \Rightarrow y$ (podstawiamy $x/\neg x$, usuwamy podwójną negację i przestawiamy strony tożsamości).

Każdą funkcję boolowską można przedstawić przez funkcje $\neg, \vee$. W takim wyrażeniu eliminujemy kolejno wszystkie wystąpienia $\vee$, posługując się powyższą definicją $\vee$ przez $\neg, \Rightarrow$.

Przykład. $f(x, y, z) = x \Rightarrow y \wedge z$. Przedstawiamy tę funkcję przez $\neg, \vee$ i eliminujemy $\vee$.

$f(x, y, z) = \neg x \vee (y \wedge z) = \neg x \vee \neg(\neg y \vee \neg z) = x \Rightarrow \neg(\neg y \vee \neg z) = x \Rightarrow \neg(y \Rightarrow \neg z)$

Definicja 9. Mówimy, że funkcja boolowska *zachowuje* 1 (odp. 0), jeżeli przyjmuje wartość 1 (odp. 0) dla wartościowania, które przypisuje 1 (odp. 0) każdej zmiennej.

Przykład. Funkcje $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ zachowują 1, ponieważ $1 \wedge 1 = 1$, $1 \vee 1 = 1$ itd. Funkcje $\wedge, \vee$ zachowują 0, ale funkcje $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ nie zachowują 0. Funkcja $\neg$ nie zachowuje ani 1, ani 0.

Fakt 10. Jeżeli wszystkie funkcje ze zbioru F zachowują 1 (odp. 0), to każda funkcja przedstawialna przez funkcje ze zbioru F zachowuje 1 (odp. 0).

Dowód. Każdą funkcję przedstawialną przez funkcje z F możemy otrzymać z funkcji z F i funkcji rzutowania $g(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ stosując wielokrotnie operację złożenia funkcji:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Operacja złożenia prowadzi od funkcji $f, g_1, \ldots, g_k$ zachowujących 1 (odp. 0) do funkcji h zachowującej 1 (odp. 0). Funkcje rzutowania zachowują 1 (odp. 0). Zatem, jeżeli każda funkcja z F zachowuje 1 (odp. 0), to każda funkcja otrzymana w ten sposób też zachowuje 1 (odp. 0). Q.E.D.

Wniosek. Żaden zbiór funkcji zachowujących 1 (odp. 0) nie jest zupełny.

Na przykład, zbiory $\{\wedge, \vee\}$, $\{\wedge, \Rightarrow\}$ nie są zupełne.

Istnieją dwie funkcje $f \in \mathrm{FB}_2$ takie, że zbiór $\{f\}$ jest zupełny.

$$x \uparrow y = \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y, \;\; x \,|\, y = \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

Funkcję $\uparrow$ nazywamy *strzałką Sheffera* lub funkcją NAND, a funkcję $|$ *binegacją* lub funkcją NOR.

Mamy: $\neg x = \neg(x \wedge x) = x \uparrow x$ i $x \wedge y = \neg(x \uparrow y) = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$. Ponieważ każdą funkcję boolowską można przedstawić przez $\neg, \wedge$, więc każdą funkcję boolowską można przedstawić przez $\uparrow$. Dla $|$ postępujemy podobnie (ćwiczenie).

Przykład. $f(x, y, z) = x \wedge y \Rightarrow z$. Przedstawiamy f przez $\neg, \wedge$:
$f(x, y, z) = \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$.
$f(x, y, z) = (x \wedge y) \uparrow \neg z = ((x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)) \uparrow (z \uparrow z)$.