Elementy logiki

Wojciech Buszkowski
Wydział Matematyki i Informatyki UAM
Zakład Teorii Obliczeń

1 Klasyczny Rachunek Zdań

1.1 Spójniki logiczne

Zdaniem w sensie logicznym nazywamy wyrażenie, które jest prawdziwe lub fałszywe. Prawdę i fałsz nazywamy *wartościami logicznymi*. Prawdę oznaczamy symbolem 1, a fałsz symbolem 0. *Zmienne zdaniowe* p, q, r, s (także z indeksami) reprezentują dowolne zdania.

Spójniki logiczne (albo: funktory KRZ) służą do konstrukcji zdań logicznie złożonych. Wyróżniamy pięć podstawowych spójników logicznych.

Spójnik *negacji* jest to wyrażenie "nieprawda, że" użyte w kontekście "nieprawda, że p". Symbol: $\neg$, w kontekście: $\neg p$. Zdanie postaci $\neg p$ nazywamy negacją zdania p.

Spójnik *koniunkcji* jest to wyraz "i" użyty w kontekście "p i q". Symbol: $\wedge$, w kontekście: $p \wedge q$. Zdanie postaci $p \wedge q$ nazywamy koniunkcją zdań p i q.

Spójnik *alternatywy* jest to wyraz "lub" użyty w kontekście "p lub q". Symbol: $\vee$, w kontekście: $p \vee q$. Zdanie postaci $p \vee q$ nazywamy alternatywą zdań p i q.

Spójnik *implikacji* jest to wyrażenie "jeżeli ..., to" użyte w kontekście "jeżeli p, to q". Symbol $\rightarrow$, w kontekście: $p \rightarrow q$. Zdanie postaci $p \rightarrow q$ nazywamy implikacją o *poprzedniku* p i *następniku* q.

Spójnik *równoważności* jest to wyrażenie "wtedy i tylko wtedy, gdy" użyte w kontekście "p wtedy i tylko wtedy, gdy q'. Symbol: $\leftrightarrow$, w kontekście: $p \leftrightarrow q$. Zdanie postaci $p \leftrightarrow q$ nazywamy równoważnością zdań p i q.

Inne oznaczenia spójników logicznych: spójnik negacji $\sim$, koniunkcji $\&, \cdot$, alternatywy $+$, implikacji $\Rightarrow$, równoważności $\Leftrightarrow, \equiv$.

Zdanie p nazywamy *argumentem* spójnika negacji w zdaniu $\neg p$. Spójnik negacji jest jednoargumentowy.

Zdania p i q nazywamy argumentami spójnika koniunkcji w zdaniu $p \wedge q$. Spójnik koniunkcji jest dwuargumentowy. Spójniki alternatywy, implikacji i równoważności są też dwuargumentowe.

Spójniki logiczne są *ekstensjonalne*: wartość logiczna zdania złożonego za pomocą danego spójnika jest jednoznacznie wyznaczona przez ten spójnik i wartości logiczne argumentów.

Negacja zdania prawdziwego jest zdaniem fałszywym. Negacja zdania fałszywego jest zdaniem prawdziwym.

Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba argumenty są prawdziwe.

Alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden argument jest prawdziwy.

Zdanie o postaci implikacji (zdanie warunkowe) jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik jest fałszywy.

Równoważność dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba argumenty mają tę samą wartość logiczną.

$\neg 1 = 0$, $\neg 0 = 1$

$$\begin{array}{llll}
1 \wedge 1 = 1 & 1 \vee 1 = 1 & 1 \rightarrow 1 = 1 & 1 \leftrightarrow 1 = 1 \\
1 \wedge 0 = 0 & 1 \vee 0 = 1 & 1 \rightarrow 0 = 0 & 1 \leftrightarrow 0 = 0 \\
0 \wedge 1 = 0 & 0 \vee 1 = 1 & 0 \rightarrow 1 = 1 & 0 \leftrightarrow 1 = 0 \\
0 \wedge 0 = 0 & 0 \vee 0 = 0 & 0 \rightarrow 0 = 1 & 0 \leftrightarrow 0 = 1
\end{array}$$

W tych wzorach symbole spójników oznaczają działania na zbiorze $\{0, 1\}$, odpowiadające poszczególnym spójnikom. Czasem działanie odpowiadające $\wedge$ oznaczamy $\wedge'$ i podobnie dla pozostałych spójników.

Tablice prawdziwościowe spójników logicznych:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

1.2 Tautologie, spełnialność, wynikanie

Formuły KRZ są to wyrażenia poprawnie zbudowane ze zmiennych zdaniowych za pomocą spójników logicznych. W formułach, które zawierają kilka spójników, stosujemy nawiasy, żeby jednoznacznie określić argumenty każdego spójnika.

PRZYKŁAD. Wyrażenie $p \wedge q \vee r$ nie jest poprawnie zbudowaną formułą. Wprowadzając nawiasy, otrzynujemy dwie istotnie różne formuły: $(p \wedge q) \vee r$ oraz $p \wedge (q \vee r)$.

Niektóre nawiasy możemy pominąć, przyjmując priorytety (siłę wiązania) spójników. Najsilniejszy jest spójnik negacji, słabsze są spójniki koniunkcji i alternatywy (równosilne), a najsłabsze spójniki implikacji i równoważności (równosilne).

$p \wedge q \rightarrow \neg p \vee q$ przedstawia formułę $(p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \vee q)$.

DEFINICJA 1. Niech V będzie pewnym zbiorem zmiennych zdaniowych. *Wartościowaniem* zbioru V nazywamy dowolną funkcję $w : V \mapsto \{0, 1\}$.

Mniej formalnie: wartościowanie jest to przyporządkowanie wartości logicznych pewnym zmiennym zdaniowym.

Każde wartościowanie w zbioru V jednoznacznie określa wartość logiczną dowolnej formuły KRZ, której wszystkie zmienne zdaniowe należą do V.

Literami $A, B, C, \ldots$ oznaczamy dowolne formuły KRZ. Wartość logiczną formuły A dla wartościowania w oznaczamy przez $w(A)$. Tę wartość można wyznaczyć w oparciu o następujące warunki rekurencyjne:

$w(\neg A) = \neg' w(A)$
$w(A \wedge B) = w(A) \wedge' w(B)$
$w(A \vee B) = w(A) \vee' w(B)$
$w(A \rightarrow B) = w(A) \rightarrow' w(B)$
$w(A \leftrightarrow B) = w(A) \leftrightarrow' w(B)$

PRZYKŁAD. $A = p \vee q \rightarrow p \wedge q$, $w(p) = 1$, $w(q) = 0$. Obliczamy:
$w(A) = w(p \vee q) \rightarrow' w(p \wedge q) = (w(p) \vee' w(q)) \rightarrow' (w(p) \wedge' w(q) =$
$= (1 \vee' 0) \rightarrow' (1 \wedge' 0) = 1 \rightarrow' 0 = 0$
W praktyce zaczynamy od drugiego wiersza i pomijamy "'".

W ten sposób możemy wyznaczyć wartość logiczną dowolnego zdania logicznie złożonego, jeżeli znane są wartości logiczne wszystkich składowych zdań logicznie prostych.

PRZYKŁAD. Zdanie: jeżeli nieprawda, że Poznań leży nad Wisłą, to jeżeli Poznań leży nad Wartą, to przez Poznań przepływa rzeka.

p - Poznań leży nad Wisłą, q - Poznań leży nad Wartą, r - przez Poznań przepływa rzeka.

Logiczny schemat zdania: $A = \neg p \to (q \to r)$. Wartościowanie: $w(p) = 0$, $w(q) = w(r) = 1$. Mamy $w(A) = \neg 0 \to (1 \to 1) = 1 \to 1 = 1$. Zatem zdanie jest prawdziwe.

Tablica prawdziwościowa formuły: $A = p \vee \neg q \to \neg p \wedge r$.

Oznaczmy: $B = p \vee \neg q$, $C = \neg p \wedge r$.

p	q	r	$\neg q$	$\neg p$	B	C	A
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

DEFINICJA 2. *Tautologią KRZ* nazywamy formułę KRZ, która przyjmuje wartość logiczną 1 dla każdego wartosciowania zmiennych występujących w tej formule.

Tautologie KRZ są logicznymi schematami zdań *logicznie prawdziwych*, tzn. prawdziwych na mocy samej logiki, niezależnie od wartości logicznych składowych zdań prostych.

PRZYKŁAD. Zdanie "Poznań leży nad Wartą" jest prawdziwe, ale nie jest logicznie prawdziwe. Jego schemat logiczny p nie jest tautologią. Zdanie "jeżeli Poznań leży nad Wartą, to Poznań leży nad Wartą" jest logicznie prawdziwe. Jego schemat logiczny $p \to p$ jest tautologią.

DEFINICJA 3. Mówimy, że formuła A jest *logicznie równoważna* formule B (w KRZ), jeżeli dla każdego wartościowania w (zmiennych występujących w tych formułach) $w(A) = w(B)$.

FAKT 1. A jest logicznie równoważne B wtw, gdy formuła $A \leftrightarrow B$ jest tautologią.

prawa łączności koniunkcji, alternatywy i równoważności:
$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$,
$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$,
$[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$

prawa przemienności koniunkcji, alternatywy i równoważności:
$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$,
$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$,
$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

prawa idempotentności koniunkcji i alternatywy:
$p \wedge p \leftrightarrow p$, $p \vee p \leftrightarrow p$

prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:
$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji
$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

prawa De Morgana:
$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$,
$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

prawo podwójnej negacji: $\neg\neg p \leftrightarrow p$

prawo transpozycji: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

prawo eksportacji-importacji: $[p \wedge q \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

prawo wyłączonego środka: $p \vee \neg p$

prawo sprzeczności: $\neg(p \wedge \neg p)$.

prawa definiowania jednych spójników przez inne:
$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$
$p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
$p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

prawa z ustalonym argumentem:
$p \wedge 1 \leftrightarrow p$, $p \wedge 0 \leftrightarrow 0$, $p \vee 1 \leftrightarrow 1$, $p \vee 0 \leftrightarrow p$
$(1 \rightarrow p) \leftrightarrow p$, $(0 \rightarrow p) \leftrightarrow 1$, $(p \rightarrow 1) \leftrightarrow 1$, $(p \rightarrow 0) \leftrightarrow \neg p$

Definicja 4. Mówimy, że wartościowanie w *spełnia* formułę A, jeżeli $w(A) = 1$. Formułę nazywamy *spełnialną*, jeżeli istnieje wartościowanie, które spełnia tę formułę. Zbiór formuł nazywamy *spełnialnym*, jeżeli istnieje wartościowanie, które spełnia wszystkie formuły z tego zbioru (tzn. *spełnia ten zbiór*).

Fakt 2. Formuła A jest spełnialna wtw, gdy formuła $\neg A$ nie jest tautologią. Formuła A jest tautologią wtw, gdy formuła $\neg A$ nie jest spełnialna.

Definicja 5. Mówimy, że formuła A *logicznie wynika* ze zbioru formuł S (w KRZ), jeżeli każde wartościowanie spełniające zbiór S spełnia formułę A.

Fakt 3. Formuła A logicznie wynika ze zbioru formuł S wtw, gdy zbiór $S \cup \{\neg A\}$ nie jest spełnialny.

Fakt 4. Formuła A logicznie wynika ze zbioru $\{A_1, \ldots, A_n\}$ wtw, gdy formuła $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A$ jest tautologią.

prawo odrywania: $(p \to q) \wedge p \to q$

prawo odrzucania: $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$

prawo sylogizmu hipotetycznego: $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

prawa symplifikacji: $p \wedge q \to p$, $p \wedge q \to q$

prawa addycji: $p \to p \vee q$, $q \to p \vee q$

Logiczne wynikanie zapisujemy też w postaci schematów wnioskowania:

$$\frac{A_1; \ldots; A_n}{A},$$

gdzie formuły $A_1, \ldots, A_n$ nazywamy *przesłankami*, a formułę A *wnioskiem*. Schemat wnioskowania nazywamy *logiczną regułą wnioskowania* KRZ, jeżeli wniosek logicznie wynika z przesłanek (tzn. ze zbioru przesłanek).

reguła odrywania (modus ponens)

$$\text{(MP)}\ \frac{p \to q;\ p}{q}$$

reguła sylogizmu hipotetycznego:

$$\text{(SYL)}\ \frac{p \to q;\ q \to r}{p \to r}$$

reguła odrzucania:

$$\frac{p \to q;\ \neg q}{\neg p}$$

reguła wprowadzania równoważności:

$$\frac{p \to q;\ q \to p}{p \leftrightarrow q}$$

1.3 Podstawianie w KRZ

Tautologie i logiczne reguły wnioskowania KRZ są zamknięte ze względu na podstawianie dowolnych formuł za zmienne zdaniowe.

$\sigma = [p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n]$ oznacza operację równoczesnego podstawiania formuły A_i za zmienną p_i dla $i = 1, \ldots, n$. Taką operację nazywamy *podstawieniem.* $A\sigma$ oznacza wynik podstawienia σ w formule A.

PRZYKŁAD. $(p \to p \vee q)[p := q,\ q := q \vee r] = q \to q \vee (q \vee r)$.

UWAGA: Wykonując podstawienie $A\sigma$, formułę A_i podstawiamy za każde wystąpienie zmiennej p_i w formule A, lecz nie za te wystąpienia, które pojawiają się w wyniku podstawiania (występują w formułach A_j). Dlatego $A[p := B, q := C]$ jest na ogół różne od $A[p := B][q := C]$.

FAKT 5. Jeżeli A jest tautologią KRZ, to $A\sigma$ jest tautologią KRZ dla każdego podstawienia σ. Jeżeli A logicznie wynika ze zbioru $\{B_1, \ldots, B_m\}$, to $A\sigma$ logicznie wynika ze zbioru $\{B_1\sigma, \ldots, B_m\sigma\}$ dla każdego podstawienia σ.

2 Postacie normalne formuł KRZ

Formuły p i $\neg p$, gdzie p jest dowolną zmienną zdaniową, nazywamy *literałami*; p jest literałem *pozytywnym*, a $\neg p$ *negatywnym.* Literały p, $\neg p$ są *przeciwne* (jeden względem drugiego).

Klauzula (alternatywa elementarna) jest to alternatywa skończenie wielu literałów, np. $p \vee \neg q \vee r$, $\neg q$.

Koniunkcja elementarna jest to koniunkcja skończenie wielu literałów, np. $p \wedge \neg q \wedge r$, $\neg q$.

Formuła w koniunkcyjnej postaci normalnej (kpn) jest to koniunkcja skończenie wielu klauzul, np. $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$.

Formuła w alternatywnej postaci normalnej (apn) jest to alternatywa skończenie wielu koniunkcji elementarnych, np. $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$.

TWIERDZENIE 1. Każda formuła KRZ jest logicznie równoważna pewnej formule w kpn i pewnej formule w apn.

PRZYKŁAD. $A = p \wedge q \leftrightarrow q \wedge \neg r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	A	apn	kpn
1	1	1	1	0	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
1	1	0	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge \neg r$	
1	0	1	0	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	
1	0	0	0	1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
0	1	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	
0	1	0	0	1	1	0		$p \vee \neg q \vee r$
0	0	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	0	0	0	1	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	

apn: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

kpn: $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Przypadki szczególne:

(1) $w(A) = 0$ dla każdego wartościowania w. Wtedy A jest logicznie równoważne formule $p \wedge \neg p$, która jest w apn.

(2) $w(A) = 1$ dla każdego wartościowania w. Wtedy A jest logicznie równoważne formule $p \vee \neg p$, która jest w kpn.

Sprowadzanie do apn i kpn metodą przekształceń równoważnościowych.

Podformuły danej formuły zastępujemy równoważnymi formułami, stosując następujące prawa (zastępujemy lewą stronę prawą stroną).

$\neg\neg A \leftrightarrow A$

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$, $(A \to B) \leftrightarrow \neg A \vee B$

$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $(B \vee C) \wedge A \leftrightarrow (B \wedge A) \vee (C \wedge A)$

$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $(B \wedge C) \vee A \leftrightarrow (B \vee A) \wedge (C \vee A)$.

Przykład. Sprowadzić formułę $A = p \vee q \leftrightarrow q \wedge \neg r$ do kpn.

$[p \vee q \to q \wedge \neg r] \wedge [q \wedge \neg r \to p \vee q]$

$[\neg(p \vee q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge [\neg(q \wedge \neg r) \vee (p \vee q)]$

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge [\neg q \vee r \vee p \vee q]$

$[(\neg p \wedge \neg q) \vee q] \wedge [(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r] \wedge [\neg q \vee r \vee p \vee q]$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r \vee p \vee q)$

Sprowadzamy A do apn. Powtarzamy trzy pierwsze kroki; otrzymujemy formułę w *negacyjnej postaci normalnej* (występują tylko $\wedge, \vee, \neg$, przy czym negacje tylko przy zmiennych).

$\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge \neg q\} \vee \{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge r\} \vee \{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge p\} \vee \{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \wedge q\}$

$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge p) \vee (q \wedge \neg r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge q) \vee (q \wedge \neg r \wedge q)$

TWIERDZENIE 2. Formuła w kpn jest tautologią KRZ wtw, gdy w każdej składowej klauzuli występuje para przeciwnych literałów.

Dowód. Twierdzenie wynika z dwóch faktów.

(1) Formuła $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ jest tautologią wtw, gdy każda formuła A_i jest tautologią.

(2) Klauzula jest tautologią wtw, gdy występuje w niej para przeciwnych literałów.

(1) jest oczywiste. W (2) oczywista jest implikacja ($\Leftarrow$). Implikację ($\Rightarrow$) dowodzimy nie wprost. Załóżmy, że w klauzuli nie występuje para przeciwnych literałów. Określamy wartościowanie w zmiennych tej klauzuli: $w(p) = 0$, jeżeli literał p występuje w klauzuli; $w(p) = 1$, jeżeli literał $\neg p$ występuje w klauzuli. Oczywiście $w(l) = 0$ dla każdego literału l tej klauzuli, a więc wartościowanie w nie spełnia tej klauzuli. Zatem dana klauzula nie jest tautologią. Q.E.D.

TWIERDZENIE 3. Formuła w apn nie jest spełnialna wtw, gdy w każdej składowej koniunkcji elementarnej występuje para przeciwnych literałów.

PRZYKŁAD. $A = p \wedge (q \vee r) \rightarrow (p \wedge q) \vee r$. Sprowadzamy A do kpn.

$\neg[p \wedge (q \vee r)] \vee [(p \wedge q) \vee r]$

$[\neg p \vee \neg(q \vee r)] \vee [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

$[\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)] \vee [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

$[(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)] \vee [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

$(\neg p \vee \neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q \vee r)$

Formuła A jest tautologią. Sprowadzamy A do apn.

$\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q) \vee r$

Formuła A jest spełnialna.

ZADANIE 1. Sprowadzić $\neg A$ do apn i stwierdzić niespełnialność.